**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA** **P.A. 2009-3**
**DACIBAHCC** **10-03-2010**

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

**Problema 1 (6.5 Ptos.)**

Sea la ecuación de Van der Waals para gases: $T = \dfrac{\left(p + \dfrac{a}{v^2}\right)(v-b)}{R}$ donde *R=0.082*, *a=3.592* y *b=0.04267* son constantes experimentales para el dióxido de carbono, se desea analizar el comportamiento de la temperatura *T (°K)* para diferentes volúmenes específicos *v* manteniendo una presión constante *p=1 atm*.

*a)* Encuentre una función spline cubico natural para *v=24, 40, 57 y 75.*
b) Estime *T* para *v=50* usando el spline natural y determine el error comparado con el valor obtenido con la ecuación de Van der Waals.
c) Escriba un programa para realizar un gráfico *v* vs *T* para *v* de *24* a 75 con paso $\Delta v = 1$ haga uso de la función "***spline***" propia del MATLAB.

**<u>Solución</u>**

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **v** | **24** | **40** | **57** | **75** |
| **T** | **293.9845** | **488.3785** | **695.3695** | **914.6975** |

$$\begin{bmatrix} 66 & 17 \\ 17 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1579 \\ 0.0537 \end{bmatrix} \quad M_1 = 0.0023 \quad M_2 = 0.0002$$

$v \in [24, 40]$ $\quad T = 0.244x10^{-4}(v-24)^3 + 12.1434(v-24) + 293.9845$

$v \in [40, 57]$ $\quad T = -0.2102x10^{-4}(v-40)^3 + 0.0012x(v-40)^2 + 12.1621(v-40) + 488.3785$

$v \in [57, 75]$ $\quad T = -0.0186x10^{-4}(v-57)^3 + 0.0001x(v-57)^2 + 12.1837(v-57) + 695.3695$

b)

$T(50) \approx 610.0957$

$T(50) = 610.1111$

$Err = 0.0154$

c)

```
v1=24:1:75
T1=spline(v,T,v1)
plot(v,T,'o',v1,T1)
```

**Problema 2 (6.5 Ptos.)**

Para la siguiente integral: $I = \int_0^t e^{kx} dx$

a) Calcule k para obtener un error de $\sqrt{2}$, si se usó el método del trapecio con un solo intervalo y con un paso igual a k.
b) Calcule la integral aproximada y el error que se comete si usamos integración por cuadratura de Gauss-Legendre (n=2), si t=1, k=2.
c) Desarrolle una función en Matlab que permita calcular la integral de cualquier función $\int_a^b f(x)dx$, usando la fórmula de Newton-Cotes de grado 3, use la siguiente cabecera: function I=cal_integral(f, a, b, n), donde:
   f: es la función f(x) como cadena
   [a,b]: Intervalo de integración
   n: Número de intervalos, múltiplo de 3

**<u>Solución</u>**

a) Aplicando trapecio y considerando h=k, x1=0,x2=k

   I=$\frac{h}{2}(e^{k*0}+e^{k*k}) = \frac{1}{k}(e^{k*k}-e^{k*0})+\sqrt{2}$

   $\frac{k}{2}(1+e^{k*k}) = \frac{1}{k}(e^{k*k}-1)+\sqrt{2}$

   $e^{k*k}(\frac{k}{2}-\frac{1}{k})+\frac{k}{2}+\frac{1}{k}-\sqrt{2}=0$

   k=$\sqrt{2}$

b) Integral definida es=$\frac{1}{k}(e^{k*1}-e^{k*0})$

   I=3.1945

   Integral de G-L es para grado 2

   I=3.1841

   Error=0.0425

c) function I=cal_integral(f, a, b, n)

```
% 	f: es la función f(x) como cadena
% 	[a,b]: Intervalo de integración
% 	n: Número de intervalos, múltiplo de 3
if rem(n,3)==0
	h=(b-a)/n;
	x=a:h:b;
	y=feval(f,x);
	s1=sum(y(1:3:n-2))+ sum(y(4:3:n+1));
	s2=sum(y(2:3:n-1))+ sum(y(3:3:n));
	I=3*h/8*(s1+3*s2);
else
	I=NaN
End
%  >> I=cal_integral('x.^4',0,1,3^6)
```

**Problema 3 (7.0 Ptos.)**
El movimiento de un sistema mecánico que se muestra en la figura esta dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2R\omega\frac{dy}{dt}+\omega^2 y=\frac{F(t)}{m}$$

$\omega=(k/m)^2$ (frecuencia natural sin amortiguamiento, $s^{-1}$)
*R=0.5* (Factor de Amortiguamiento)
*k=3.2* (Constante del resorte, kg/seg$^2$)
*m=5* (masa, kg.)
***F(t)*** (fuerza externa en Newtons)
Si ***F(t)*** tiene un comportamiento de acuerdo a la siguiente tabla:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| t | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| F(t) | 4 | 1 | 0 | 1 |

a) Si el carrito parte del reposo, encontrar su posición luego de 0.3 segundos, aplique Taylor de orden 2 con h=0.1 seg.
b) Escriba un programa para evaluar y(0.3) usando un paso de h=0.01 de Runge-Kutta de orden 2, si F(t)=50*(t-0.15)$^2$.

**<u>Solución</u>**

a)
$R=0.5$

$$\omega=\left(\frac{3.2}{5}\right)^2=0.4096$$

$$y''=0.4096y'+0.4096^2y=\frac{F(t)}{5}$$

$$f(t)=100(t-0.2)^2$$

$$y''=0.4096y'+0.4096^2y=20(t-0.2)^2$$

$$y'=z$$

$$z'=20(t-0.2)^2-0.4096z-0.4096^2y$$

$$y''=z'=20(t-0.2)^2-0.4096z-0.4096^2y$$

$$z''=40(t-0.2)-0.4096z'-0.4096^2z$$

$$t_{n+1}=t_n+0.1$$

$$y_{n+1}=y_n+hy_n'+\frac{h^2}{2}y_n''$$

$$z_{n+1}=z_n+hz_n'+\frac{h^2}{2}z_n''$$

| n | $t_n$ | $y_n$ | $z_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.1 | 0.0040 | 0.0384 |
| 2 | 0.2 | 0.0088 | 0.0363 |
| 3 | 0.3 | 0.0123 | 0.0347 |

b)

```
%rk2_ef.m
clear all
t(1)=0; y(1)=0; z(1)=0; h=0.01; w=32/5;
for i=1:30
    k1=h*z(i);
    l1=h*(10*(t(i)-0.15)^2-w*z(i)-w^2*y(i));
    k2=h*(z(i)+l1);
    l2=h*(10*(t(i)+h-0.15)^2-w*(z(i)+l1)-w^2*(y(i)+k1));
    t(i+1)=t(i)+h;
    y(i+1)=y(i)+1/2*(k1+k2);
    z(i+1)=z(i)+1/2*(l1+l2);
end
disp([t' y' z'])
```

**EL PROFESOR**